

## 9 不要墜入情境的囚牢之中…呼吸與憋氣交互進行，可以讓頭腦變得清晰



數學經文

呼吸與思想是深深的關連，就好像它們是同一件事的兩極。每當頭腦改變，呼吸也會跟著改變，同樣的，呼吸改變了，頭腦的思考品質也跟著變。比方說，理不出頭緒，亂了分寸時，呼吸會立刻改變，那個會思考的韻律消失了。那個呼吸變成另外一個品質，它變成不規則的。

抽絲剝繭有他的呼吸型態，亂了章法也有他的呼吸方式。調整呼吸是改變思考品質的一帖良方，而且效果就像電腦的熱插拔一樣立即見效。如何巧妙地發現它們，又科學地計算它們，確實是對人類的一大挑戰。

題目：設地球與太陽的平均距離為 1 天文單位，在 1766 年，天文學家波德提出有名的波德法則：行星與太陽的平均距離  $d$ （天文單位）可以用數學式子

$$d = \alpha + \beta \cdot 2^n$$

表示。下表是行星所對應的  $n$  值表：

行星	對應的 $n$ 值
金星	0
地球	1
火星	2
木星	4
土星	5
天王星	6

若土星與太陽的平均距離為 10 天文單位，則求下列各值

- (1) 求  $\alpha, \beta$  的值。
- (2) 已知  $n=7$  所對應的是冥王星，求冥王星與太陽的平均距離。
- (3) 一八〇一年一月一日在距離太陽 2.8 天文單位的地方發現了第一顆小行星穀神星，

問穀神星所對應的  $n$  值是多少？

不要為“情”所困（陷入情境試題中無法自拔）是老師與學生所面對的一大挑戰。老師的困擾在於找不到更多合身的情境試題，用在教學與測驗上，甚至題目過於冗長，不知如何在黑板上呈現，也是一大挑戰；學生的難處在於語文的瞭解，如何從冗長的敘述裡，抽絲撥繭取出真正有用的數學元素，順利解題，是出題者給學生的挑戰，也是考驗學生應用數學的能力。

機器狗

海盜兩題

### 9.1 如何從情境試題中解脫

就以題目這道情境試題為例，題目裡面所隱藏的數學元素僅如下四點：

- ① 地球與太陽的平均距離為 1 天文單位；
- ② 土星與太陽的平均距離為 10 天文單位；
- ③ 行星與  $n$  的對應值表：

行星	對應的 $n$ 值
金星	0
地球	1
火星	2
木星	4
土星	5
天王星	6

- ④ 行星與太陽的平均距離  $d = \alpha + \beta \cdot 2^n$ 。

現在就利用這四點數學元素解題：將地球的資料代入得到

$$1 = \alpha + \beta \cdot 2^1 \Rightarrow \alpha + 2\beta = 1;$$

將土星的資料代入得到

$$10 = \alpha + \beta \cdot 2^5 \Rightarrow \alpha + 32\beta = 10.$$

(1) 將兩式相減得到

$$30\beta = 9 \Rightarrow \beta = 0.3, \alpha = 0.4.$$

(2) 由(1)得到

$$d = 0.4 + 0.3 \cdot 2^n.$$

冥王星與太陽的平均距離為

$$d = 0.4 + 0.3 \cdot 2^7 = 38.8 \text{ (天文單位)}.$$

(3) 由

$$2.8 = 0.4 + 0.3 \cdot 2^n \Rightarrow n = 3$$

知道，穀神星所對應的  $n = 3$ 。

讓我們探索一道饒富趣味的情境試題：

**練習 1** 有位數學家按某家的門鈴，有位女士應門。數學家問她「請問妳有幾個小孩？」她說：「三個」。「那他們幾歲呢」這女士覺得他太魯莽，決定不理他。數學家道歉之後，要求她給點暗示。女士回答：「三個孩子的年齡相乘是 36。」（當然小孩子的年紀都是正整數。）數學家想了一下之後，要求另一點提示。女士又說：「他們年齡相加，等於我家的門牌號碼。」數學家深思之後，居然要求一個最後的提示。女士嘆口氣說：「大孩子在美國出生，那一年我都居住在美國，第二個小孩是在南非出生的。」數學家終於知道這些孩子們的年齡。

請根據問題的情境列舉當中重要的數學元素，並根據列舉的數學元素求孩子們的年齡。

## 9.2 不要為情境而情境

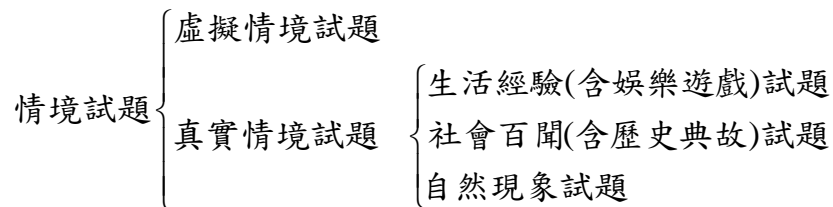
所謂“情境試題”意指數學試題本身是具有情境的，此類試題在於測驗學生是否能將情境與所學的數學相連結（融合），進而解決問題。情境試題的來源可以初分成底下兩型：

(1) 虛擬的情境試題。

(2) 真實的情境試題。

就如同拍電影一樣，虛擬情境試題的情境是虛構的，出自命題者的杜撰，如有雷同，純屬巧合；而真實情境試題則是取材自生活經驗，社會故事或自然現象，根據其來源的不同，又將之細分成如下三類：

- ① 生活經驗（含娛樂遊戲類）之情境試題。
- ② 社會百聞（含歷史典故類）的情境試題。
- ③ 自然現象所產生的情境試題。



**例題 1** 一位海盜欲將三件珠寶埋藏在一個島上的三個地方，海盜就以島上的一棵大王椰子樹為中心，由大王椰子樹向東走 12 步埋他的第一件珠寶；由大王椰子樹向東走 4 步，再往北走  $a$  步埋他的第二件珠寶；最後由大王椰子樹向東走  $a$  步，再往南走 8 步埋他的第三件珠寶。事隔多年之後，海盜僅記得  $a > 0$  及埋藏珠寶的三個地方在同一直線上。那麼  $a =$  \_\_\_\_\_。

**【解】** 我們將大王椰子樹的座標設為  $(0,0)$ ，將東西向設為  $x$  軸（東邊為正向），南北向設為  $y$  軸（北邊為正向）。因此，第一件珠寶的座標為  $(12,0)$ ，第二件珠寶的座標為  $(4,a)$ ，第三件珠寶的座標為  $(a,-8)$ 。由題目知道，這三個點在同一條直線上，故任兩點的斜率相等，得到

$$\frac{0-a}{12-4} = \frac{0-(-8)}{12-a}$$

計算得到

$$a = 16, -4.$$

因為  $a > 0$ ，所以  $-4$  不合，故  $a = 16$ 。

**例題 2** 下表是 2001 年時，從各國國會網站取得有關「該國國會議員席次與人口數」的資料：

國名	會議席次	人口數(千人)
冰島	63	270
挪威	165	4480
丹麥	175	5330
泰國	393	60600
日本	500	126540

根據上述資料，一個人口數為  $P$  千人的國家，他的國會議員席次以下列那個公式制訂較恰當：

- (1)  $\frac{P}{4}$
- (2)  $0.1P + 36$
- (3)  $4\sqrt{P}$
- (4)  $10\sqrt[3]{P}$
- (5)  $27\log_{10} P$

**【解】**選項(1)(2)為線性函數，顯然不可能；選項(5)為對數函數，當  $P$  增為原來 10 倍時，席次只增加 27 席，顯然與資料呈現不符。將數據代入選項(3)(4)可知(4)較符合。故答案為(4)。

這是數學乙考的「立委席次」問題，本問題是從政治學上的「議會規模的立方根法則」而來，該法則是說“立委席次最適當的規模約略等於其活躍人口的兩倍，再開立方”：

$$S = \sqrt[3]{2P},$$

這裡的  $S$  代表立委席次，而  $P$  代表活躍人口數，即指成年的識字人口數”。

接下來讓我們欣賞一道真實的間諜故事，這可是從 Discovery 頻道看到的歷史故事。相關數據當然是出於善意的捏造。

**練習 2** 印度間諜南星在前往拉薩的途中遇到搶匪，南星落荒而逃，轉往一條小路。翌日發現太陽在他逃亡小路正前方偏右 120 度的方向升起。南星回想被搶當晚，北極星出現在前往拉薩之路正前方偏左 50 度的方向上。問南星前往拉薩之路與落荒而逃的小路夾角是幾度？（註：太陽升起的方向算為正東，北極星出現的方向算為正北）

- (1) 50 度
- (2) 70 度
- (3) 80 度
- (4) 120 度
- (5) 170 度

**例題 3** 有兩種不同的阻力會影響飛機飛行：

(1) 空氣阻力  $F_a$ ：

這種阻力和飛機速度  $v$  的平方成正比。波音 747 的這種關係為  $F_a = 3v^2$ 。

(2) 電感阻力  $F_i$ ：

這種阻力因速度  $v$  增加而減少，與飛機重量  $m$  的平方成正比。波音 747 的這種關係

$$\text{為 } F_i = 7.5 \times 10^{-4} \times \frac{m^2}{v^2} \text{。}$$

波音 747 所受的總阻力  $F_t$  是空氣阻力  $F_a$  與電感阻力  $F_i$  的和。最有效的速度是總阻力最小時的速度。問：波音 747 最有效的速度是多少？

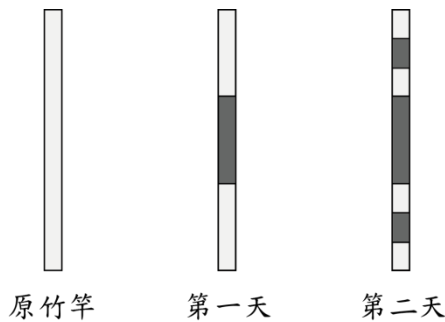
**【解】**由題目知道，要求的最有效速度是發生在空氣阻力與電感阻力之和為最小的時候。由算幾不等式知道

$$\begin{aligned}
F_a + F_i &= 3v^2 + 7.5 \times 10^{-4} \times \frac{m^2}{v^2} \\
&= 2 \times \frac{3v^2 + 7.5 \times 10^{-4} \times \frac{m^2}{v^2}}{2} \\
&\geq 2 \times (3v^2) \left( 7.5 \times 10^{-4} \times \frac{m^2}{v^2} \right) \\
&= 45 \times 10^{-4} \times m^2.
\end{aligned}$$

等號成立時，

$$\begin{aligned}
3v^2 &= 7.5 \times 10^{-4} \times \frac{m^2}{v^2}, \\
v &= \frac{\sqrt[4]{40m^2}}{20}.
\end{aligned}$$

**練習 3** 有一廟在做醮祈福期間，依神明指示：在廟前立了一根高 81 公尺的灰色竹竿，第一天將竹竿平分成三等份，並將中間的那等份塗成黑色；第二天將剩下灰色的那兩段竹竿，也分別平分成三等份，並將中間的等份塗成黑色，如下圖所示：



依此連續做五天。試問

- (1) 五天後灰色部份的竹竿總共有幾段。
- (2) 這些灰色部份的竹竿總長是多少公尺？

**例題 4** 相傳包子是三國時白羅家族發明的。孔明最喜歡吃他們所做的包子，因此白羅包子店門庭若市，一包難求，必須一大清早去排隊才有包子吃。事實上，白羅包子店只賣一種包子，每天限量供應 999 個，且規定每位顧客僅能購買一個，兩個或者是三個包

子，價錢分別是 8, 15 及 21 分錢。在那三國戰亂的某一天，包子賣完後，老闆跟老闆娘有如下的對話：

老闆說：「賺錢真辛苦，一個包子成本就要 5 分錢，今天到底賺了多少錢？」

老闆娘回答說：「今天共賣了 7195 分錢，只有 432 位顧客買到包子。」

(1) 請問當天白羅包子店淨賺多少錢？

(2) 聰明的你，請幫忙分析當天購買 1, 2 及 3 個包子的人數分別是多少人呢？

【解】

(1) 當天白羅家賣了 7195 分錢，總共 999 個包子，而一個包子的成本是 5 分錢，所以當天白羅家可以賺

$$7195 - 999 \times 5 = 2200$$

分錢。

(2) 由題目可得知，若是顧客買一個包子可賺 3 分錢，買兩個包子可賺 5 分錢，買三個包子可賺 6 分錢。假設買一個包子的顧客總共有  $x$  個，買兩個包子的顧客總共有  $y$  個，故買三個包子的顧客總共有  $432 - x - y$  個，因此可得下列等式

$$\begin{cases} 3x + 5y + 6(432 - x - y) = 2200 \\ x + 2y + 3(432 - x - y) = 999 \end{cases}$$

解得

$$x = 95, y = 107.$$

故買 1, 2 及 3 個包子的人數分別為 95, 107, 230 人。

**例題 5** 十五、六世紀的加勒比海是海盜的天堂。因為海盜必須經年征戰，四肢容易殘缺，所以想一圓海盜夢的人，常常需付出慘痛的代價。

當時無征戰能力的海盜成立了醫療保險制度。只要是繳交 12 披索保險費的海盜，就終生享有如下的殘缺給付：傷殘成獨眼海盜給付 100 披索；傷殘成單臂海盜給付 500 披索；傷殘成跛腳海盜給付 400 披索，死亡或是其它殘缺不給予給付，而且每人至多僅給付一次。



根據調查，海盜終其一生，傷殘成獨眼海盜、單臂海盜及跛腳海盜的機會是千分之十八、十及八。試問：這種醫療保險制度預期可以從每位投保的海盜身上賺取 \_\_\_\_\_ 披索。

【解】由機率的期望值可算得

$$12 - \left( 100 \times \frac{18}{1000} + 500 \times \frac{10}{1000} + 400 \times \frac{8}{1000} \right) = 2,$$

故這種醫療保險制度預期可以從每位投保的海盜身上賺取 2 披索。

# 不要墜入情境的囚牢之中…呼吸與憋氣交互進行，可以讓頭腦變得清晰的練習題解答

## 練習 1

這道題目所隱藏的數學元素僅如下四點：

- ① 三個孩子的年齡相乘是 36；
- ② 他們年齡相加，等於我家的門牌號碼；
- ③ 數學家深思之後，居然要求一個最後的提示；
- ④ 大孩子在美國出生，那一年我都居住在美國，第二個小孩是在南非出生的。

根據數學元素①知道，三個小孩子的年齡有

$$(1,1,36), (1,2,18), (1,3,12), (1,4,9), (1,6,6), (2,2,9), (2,3,6), (3,3,4)$$

這八種可能性。從數學元素②知道，門牌號碼可能為下列幾種情形：

$$1+1+36=38$$

$$1+2+18=21$$

$$1+3+12=16$$

$$1+4+9=14$$

$$1+6+6=13$$

$$2+2+9=13$$

$$2+3+6=11$$

$$3+3+4=10.$$

其中，除了 13 有兩種情形，其餘的和都僅有一種。由數學元素③得知，數學家在知道「他們年齡相加，等於女士住家的門牌號碼」之後，仍然無法得到正確答案。門牌號碼的可能情形必為

$$1+6+6=13$$

$$2+2+9=13$$

這兩種之一。

根據數學元素④得知，若是第一種代表女士的頭兩個小孩是雙胞胎，應該一起出生的，則與題意不合。因此三個小孩的年齡分別為

$$9,2,2$$

歲。

### 練習 2

因為南星在被搶當晚，北極星出現在前往拉薩之路正前方偏左 50 度的方向上，也就是說，前往拉薩之路的方向在北方偏右 50 度；而翌日，太陽在他逃亡小路正前方偏右 120 度的方向，也就是說，逃亡小路的偏左 120 度是東方，即偏左 30 度是北方，故前往拉薩之路與逃亡小路的夾角為

$$50 + 30 = 80$$

度。

### 練習 3

(1) 首先，我們先觀察每次將灰色部份分三段中間部份塗成黑色，將會剩下兩段是灰色的，也就是說，每分一次，會把原本的一段灰色部份變成兩段。而一開始有一根灰色竹竿，第一天會產生兩段灰色部份，第二天會產生  $2 \times 2 = 4$  段灰色部份，因此到了第五天，會產生

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

段灰色部份。

(2) 經過觀察，每過一天，灰色部份會變為原來的  $\frac{2}{3}$  倍，因此第一天的灰色部份長度為

$81 \times \frac{2}{3}$  公尺，第二天為  $81 \times (\frac{2}{3})^2$  公尺，依此類推，第五天為

$$81 \times (\frac{2}{3})^5 = \frac{2048}{3} = 682 \frac{2}{3}$$

公尺。